

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ**

1. **A.** Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

i.  $(x - y)(-x + y) = x^2 - y^2$

ii.  $(-x - 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

**B.** Συμπληρώστε τα κενά:

i.  $(\dots - \dots)^2 = 9x^2 \dots 6xy \dots$

ii.  $(x - 3)^3 = \dots$

**Γ.** Παραγοντοποιείτε πλήρως τις ακόλουθες παραστάσεις:

i.  $x^2y - x^2 - xy + x + y - 1 =$

ii.  $16x^2 + 40xy + 25y^2 =$

iii.  $16y^2 - 9(x + y)^2 =$

iv.  $2x^2 - 3x + 1 =$

2. **A.** Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις ακόλουθες παραστάσεις:

i.  $4\alpha^2\beta - \frac{\beta^3}{9}$

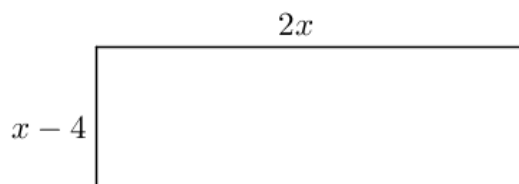
ii.  $5\alpha^v - 20\alpha^{v+1}\beta + 20\alpha^{v+2}\beta^2, v \in \mathbb{N}$

iii.  $3x(1 - y)^2 - 6x^2(y - 1)^2 - 3x(1 - y)$

**B.** Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$  και  $\beta = \frac{2}{3-\sqrt{5}}$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\alpha + \beta$ .

3. Η επιφάνεια ενός χαλιού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι διαστάσεις του σε μέτρα είναι:



i. Γράψτε μια έκφραση για το εμβαδόν A, σε  $m^2$ , του χαλιού.

Αν το εμβαδόν του χαλιού είναι  $10m^2$ , τότε

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του x.

iii. Δώστε την τιμή του μήκους και του πλάτους του χαλιού, σε μέτρα.

4. Δίνεται η εξίσωση:  $2x^2 + 5x - 1 = 0$ .
- Δείξτε ότι έχει δύο πραγματικές, διαφορετικές, ρίζες,  $x_1, x_2$ .
  - Υπολογίστε τις ακόλουθες παραστάσεις:  $x_1 + x_2$ ,  $x_1 \cdot x_2$  και  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ .
  - Κατασκευάστε μια δευτεροβάθμια εξίσωση τέτοια ώστε οι ρίζες της να είναι:  $r_1 = \frac{1}{x_1}$  και  $r_2 = \frac{1}{x_2}$ .

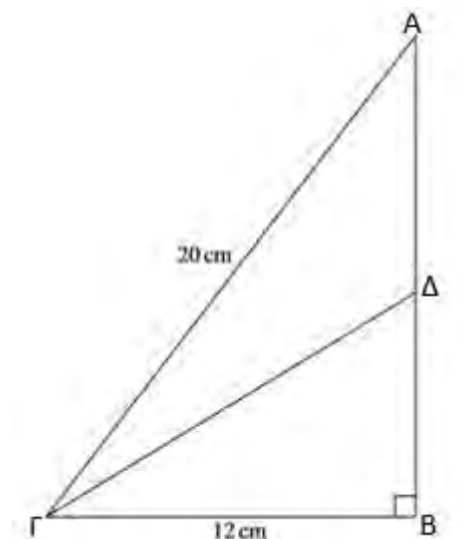
5. Στο τρίγωνο ABΓ δίνονται οι πλευρές ΑΓ=20cm, ΒΓ=12 και η γωνία  $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$ .

I. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

Δίνεται το σημείο Δ της πλευράς ΑΒ τέτοιο ώστε  $\varepsilon\varphi(\widehat{\Delta\Gamma B}) = 0,6$ .

II. Να βρείτε το μήκος της ΔΒ.

III. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ.



6. 1. Να λύσετε την παρακάτω ανίσωση και να γράψετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος Δ.

$$\frac{|2x - 1|}{3} - 1 < \frac{3 - |1 - 2x|}{4}$$

2. Αν  $x \in \Delta$ , να δείξετε ότι η ακόλουθη παράσταση Α είναι σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητη του  $x$ ), όπου:

$$A = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1} + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$$

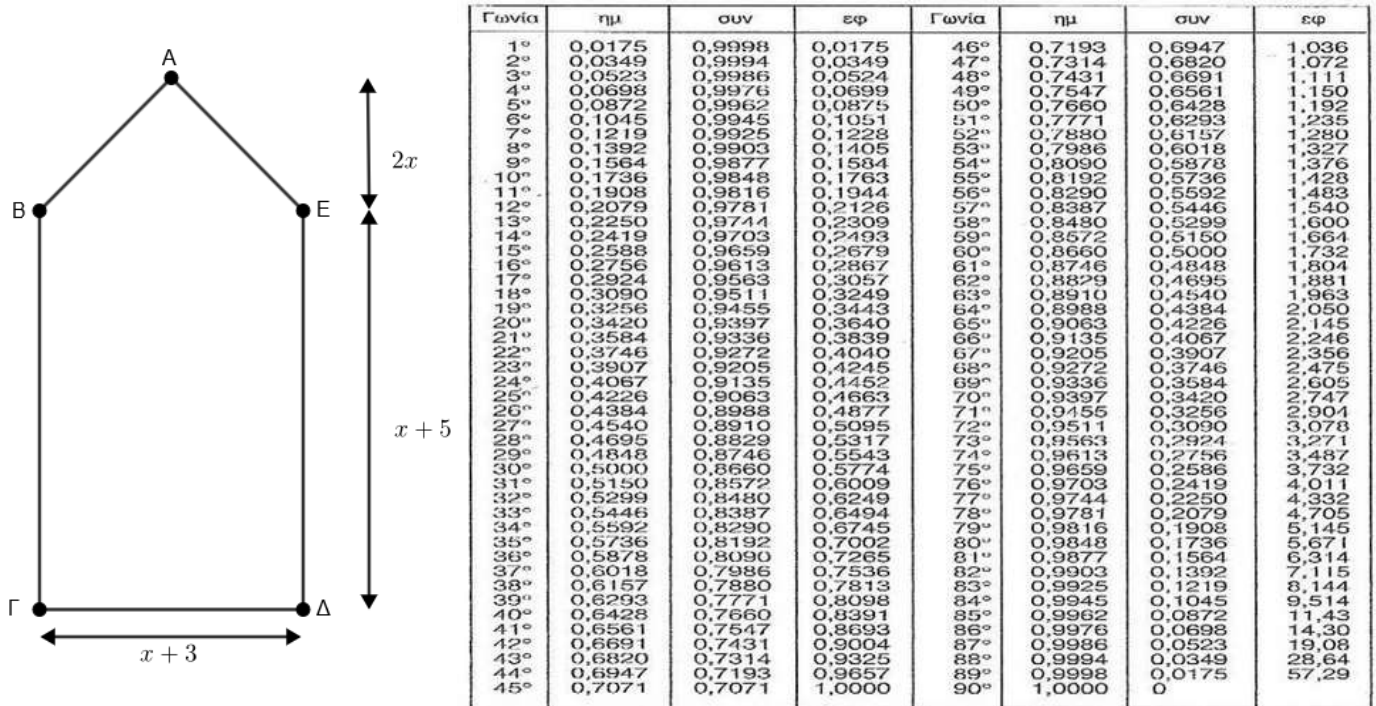
7. Η βάση ενός ηλεκτρικού σίδηρου έχει σχήμα πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, όπου το ΒΓΔΕ είναι παραλληλόγραμμο με πλευρές  $(x + 3)$ cm και  $(x + 5)$ cm και το ΑΒΕ είναι ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ=ΑΕ) με ύψος  $2x$  cm. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔΕ είναι  $21 \text{ cm}^2$ .

IV. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔΕ συναρτήσει του  $x$ .

V. Να δείξετε ότι  $2x^2 + 11x - 6 = 0$ .

VI. Να βρείτε το μήκος του ΓΔ.

VII. Να βρείτε προσεγγιστικά τη γωνία  $B\hat{A}E$ .



8. Δίνεται το τριώνυμο  $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ ,  $\lambda \neq 0$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε  $\lambda \neq 0$ .

2. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα  $S = x_1 + x_2$  συναρτήσει του  $\lambda \neq 0$  και να βρείτε την τιμή του γινομένου  $P = x_1 \cdot x_2$  των ριζών.

3. Αν  $\lambda > 0$ , το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Αν  $0 < \lambda \neq 1$  και  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  και 1.

9. 1. Να χαρακτηρίσετε, χωρίς να αιτιολογήσετε, τις παρακάτω προτάσεις, ως σωστές (Σ) ή ως λάθος (Λ).

i. Αν  $\beta \geq 0$ , τότε  $\sqrt{\alpha^2 \beta} = \alpha \sqrt{\beta}$ .

ii. Για κάθε  $\alpha, \beta \geq 0$  ισχύει  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$ .

iii. Αν  $\alpha \geq 0$ , μπορούμε πάντα να γράφουμε  $\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt{\alpha}$ .

(Μονάδες 6)

2. Να επιλέξετε, χωρίς να αιτιολογήσετε, τη σωστή απάντηση:

- i. Από την ισότητα  $|x| + |y| = 0$  προκύπτει ότι:

1.  $x > 0$  και  $y > 0$
2.  $|x|$  και  $|y|$  είναι αντίθετοι αριθμοί
3.  $x = 0$  και  $y = 0$
4.  $x > 0$  και  $y < 0$ .

- ii. Αν  $x < 0$  και  $y > 0$  τότε

1.  $|x| + |y| = x + y$
2.  $|x| + |y| \geq |x + y|$
3.  $|x| - |y| = -x - y$
4.  $|y| - |x| = |x - y|$

- iii. Αν ισχύει η σχέση  $|2 - x| = -x + 2$ , τότε

1.  $x \geq 2$
2.  $x \geq 0$
3.  $x \leq 2$
4.  $0 \leq x \leq 2$

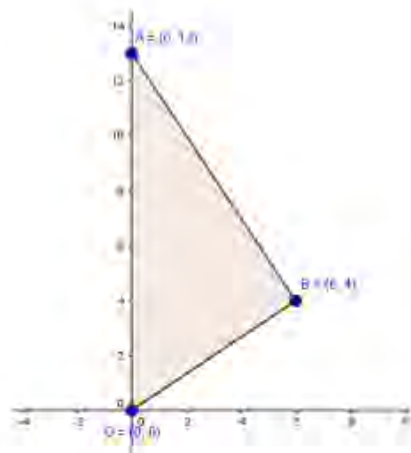
3. Να δείξετε ότι η τιμή της παρακάτω παράστασης είναι ανεξάρτητη του  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}$$

10. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνονται τα σημεία

$O(0, 0)$ ,  $A(0, 13)$  και  $B(6, 4)$ .

- I. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων A και B.
- II. Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο;  
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- III. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.



11. Η εξίσωση  $2x^2 + x + c = 0$ , όπου  $c \in \mathbb{R}$ , έχει δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες  $r_1, r_2$ .

I. Δώστε το άθροισμα,  $S$ , και το γινόμενο,  $P$ , των ριζών αυτών.

II. Αν επιπλέον ισχύει ότι  $r_2 = \frac{r_1^2}{2}$ , να δείξετε ότι  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = \frac{1}{2}$ .

III. Να βρείτε την τιμή του  $c \in \mathbb{R}$ .

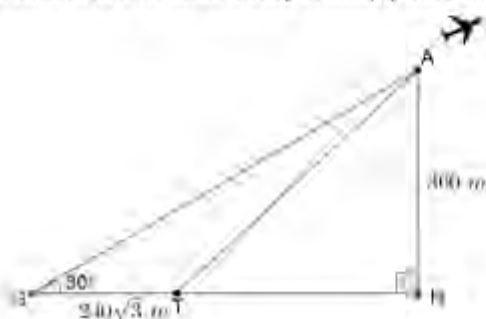
IV. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου  $2x^2 + x - 1$ .

12. Ο Θάνος είναι στο αεροδρόμιο του Βερολίνου και παρακολουθεί τα αεροπλάνα που καθώς απογειώνονται. Συγκεκριμένα, παρατηρεί ένα αεροπλάνο που βρίσκεται σε γωνία  $30^\circ$  από το σημείο  $G$  που εκείνος στέκεται. Το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος 360 μέτρων. Τα δεδομένα φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.

a. Υπολογίστε την οριζόντια απόσταση,  $GH$ , του αεροπλάνου από το Θάνο.



Το αεροπλάνο απογειώθηκε από το σημείο  $T$ , το οποίο είναι  $240\sqrt{3}$  μέτρα από εκεί που στέκεται ο Θάνος, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



b. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο ερώτημα (a), υπολογίστε τη γωνία  $\widehat{ATH}$ , δηλαδή τη γωνία απογείωσης του αεροπλάνου.

13. A. Για τις ακόλουθες ερωτήσεις, επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

I. Αν  $a + b = 5$  και  $a^2 - b^2 = 30$ , η τιμή του  $a - b$  είναι:

A.-5      B.-6      C.8      D.6

II. Αν  $(a + b)^2 = 36$  και  $a^2 + b^2 = 68$ , η τιμή του  $ab$  είναι:

A.-32      B.12      C.-16      D.-18

B. Να απλοποιήσετε την ακόλουθη παράσταση:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 4x - 20}{3x^2 - 75} : \frac{x^2 + 4}{x^2 + 10x + 25}$$

14.

A1. a. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:  $A = x^2 - 10x + 25$   
και  $B = 25 - x^2$ .

b. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $\Gamma = \frac{(x^2-10x+25)^{2021}(x+5)^{2021}}{(5-x)^{2021}(25-x^2)^{2021}}$

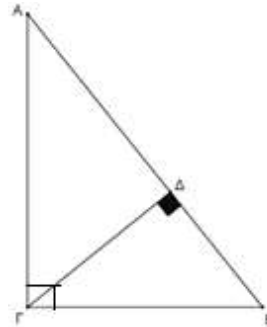
A2. Στις επόμενες ερωτήσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση

a. Αν  $x < 2$ , τότε η παράσταση  $A = |2x - 4| + 3$  απλοποιείται ως

- i.  $A = 2x - 1$
- ii.  $A = 1 - 2x$
- iii.  $A = 2x + 7$
- iv.  $A = 7 - 2x$

b. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος ισχύει:

- i.  $\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$
- ii.  $\eta\mu A = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$
- iii.  $\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Gamma}{AB}$
- iv.  $\sigma\upsilon\nu A = \frac{B\Gamma}{AB}$



15.

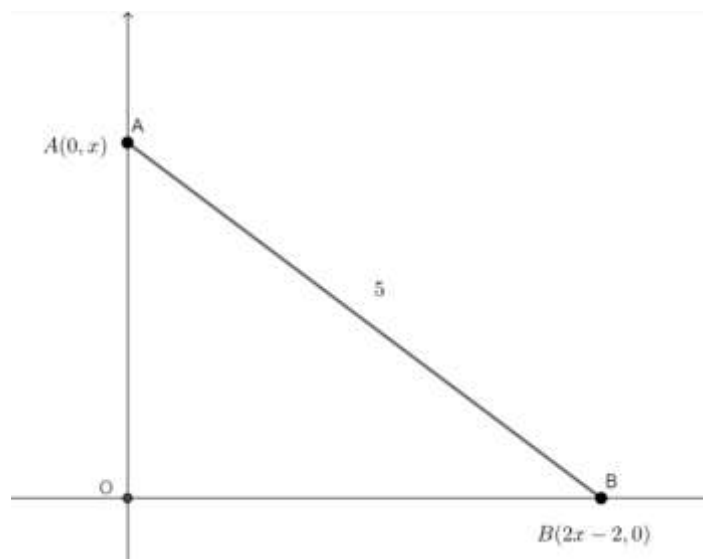
Έστω  $A = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$ .

Γ1. Για ποιες τιμές  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$ ;

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση  $|A| = 2$ .

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση  $A \leq 2$ .

16.



**B1.** Να δείξετε ότι  $5x^2 - 8x - 21 = 0$

**B2.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.

**B3.** Να βρείτε το ύψος του τριγώνου AOB που αντιστοιχεί στην πλευρά AB.

**B4.** Αν η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι  $-0,75$  να βρείτε την εξίσωση της ευθείας αυτής στη μορφή  $y = ax + \beta$ .

17.

Δίνεται η εξίσωση  $|a - 2|x^2 + |1 - 2a|x + |2 - a| = 0$  με  $a \neq 1$ . Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες.

**Δ1.** Να βρείτε τις πιθανές τιμές του  $a$ .

**Δ2.** Να δείξετε ότι οι ρίζες είναι αρνητικοί αριθμοί και αντίστροφοι.

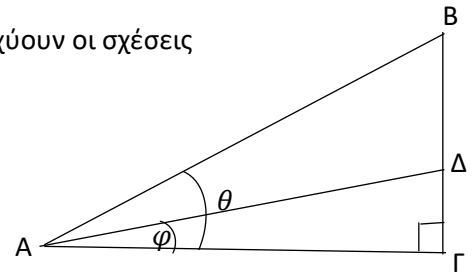
**Δ3.** Αν η μια ρίζα ( $\rho_1$ ) είναι τετραπλάσια της άλλης ρίζας ( $\rho_2$ ), βρείτε τις δύο ρίζες.

18.

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος. Σημειώστε στην κόλλα σας ένα Σ ή ένα Λ αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη αντίστοιχα (χωρίς να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ( $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ) του διπλανού σχήματος ισχύουν οι σχέσεις

- a.  $\varepsilon\varphi\theta > \varepsilon\varphi\varphi$
- b.  $A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2$
- c.  $\sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\varphi$
- d.  $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$
- e.  $\varepsilon\varphi(\theta - \varphi) = \frac{B\Delta}{A\Delta}$



A2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 25\alpha^2 + 20\alpha\beta + 4\beta^2 \quad \text{και} \quad B = 9\gamma^2 - 3\gamma\delta + \frac{\delta^2}{4},$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  πραγματικοί αριθμοί.

- a. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως την παράσταση:  $A - B$
- b. Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα  $\alpha, \beta$  και τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα  $\gamma, \delta$  ώστε  $A + B = 0$ .

19.

Ο Γιάννης πληρώνει 8,75€ για ένα εισιτήριο στο σινεμά. Αν αγοράσει  $x$  εισιτήρια σε ένα χρόνο θα πληρώσει συνολικά  $y$  ευρώ όπου  $y = 8,75x$ .

Την περασμένη χρονιά ο Γιάννης ξόδεψε λιγότερα από 88€.

B1. Να βρείτε το μέγιστο αριθμό εισιτηρίων που αγόρασε ο Γιάννης την περασμένη χρονιά.

Η Μαρία αγοράζει κάθε χρόνο για το σινεμά ένα ετήσιο εκπτωτικό κουπόνι αξίας 50€ με το οποίο στη συνέχεια πληρώνει 2,50€ για κάθε εισιτήριο.

B2. Να εκφράσετε το **συνολικό** ποσό  $t$  που ξοδεύει η Μαρία για σινεμά σε ένα χρόνο αν αγοράζει  $x$  εισιτήρια.

Κατά την περσινή χρονιά, ο Γιάννης και η Μαρία αγόρασαν τον ίδιο αριθμό εισιτηρίων και πλήρωσαν συνολικά τα ίδια χρήματα.

B3. Να βρείτε τον αριθμό εισιτηρίων που αγόρασε ο Γιάννης την περασμένη χρονιά.



**20.**

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}$  και  $\beta = \sqrt{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

**Γ1.** Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

**Γ2.** Δίνεται ότι  $\alpha = 3$  και  $\beta = 2$ . Αν  $\alpha < x < 2\beta$ , να αποδείξετε ότι

**a.**  $|x - \alpha| + |x - 2\beta| = 1$

**b.**  $x^3 - 2\beta x^2 < 3\alpha x - 6\alpha\beta$

**21.**

Δίνεται το τριώνυμο:  $4x^2 - 4\lambda x + 4\lambda - 3$ , με  $\lambda$  πραγματικό.

**Δ1.** Αποδείξτε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι  $\Delta = 16(\lambda - 1)(\lambda - 3)$ .

**Δ2.** Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε το τριώνυμο να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

**Δ3.** Αν  $\lambda = 2.9$  να λύσετε την ανίσωση:  $4x^2 - 4\lambda x + 4\lambda - 3 < 0$

**Δ4.** Αν το τριώνυμο έχει ρίζες  $x_1, x_2$ , να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , αν  $S + P = \frac{29}{4}$

(όπου  $S$  το άθροισμα και  $P$  το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου).

**Δ5.** Αν  $\lambda = 4$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $|x_1 + 1||x_2 + 1|$ ,

χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες του τριωνύμου.